LINEÄRA PARTIELLA DIFFERENTIALEKVATIONER MED MULTIPLA KARAKTERISTIKER.

AF

HENRIK BLOCK.

PARTIELLA differentialekvationer med sammanfallande karakteristiker ha hittills blifvit föga undersökta, om man bortser från ett par ekvationer inom den matematiska fysiken, bland hvilka värmelednings-ekvationen är den bäst kända. Att emellertid en dylik undersökning skulle vara af ett synnerligen stort intresse, är att förutse på grund af de intressanta resultat, som studiet af värmeledningsekvationen gifvit.

I ett arbete med titeln »Caratteristiche multiple e problema di Cauchy« [1]) har *Levi* undersökt, hur *Cauchy's* problem gestaltar sig för ekvationer af högre ordning med multipla karakteristiker. Den så intressanta reella teorien beröres emellertid blott föga i detta arbete. *Levi* anger nämligen en klass af ekvationer, för hvilka det *Cauchy'ska* problemet är möjligt ur reel synpunkt utan accessoriska villkor. De ekvationer, för hvilka så är förhållandet, äro emellertid ganska speciella. Från reel synpunkt är gifvetvis det fall af det största intresset, då *Cauchy's* problem icke är möjligt, ty det är uppenbarligen i detta fall, som väsentligt nya resultat behöfvas och äro att vänta. Jag har därför företagit en undersökning af ekvationer af denna typ [2]). Som i allmänhet är fallet inom den reella teorien, måste man emellertid börja med studiet af vissa enkla typer af ekvationer. Allmännare fall kunna sedan med hjälp af lämpliga variabelombyten, integralekvationer o. s. v. reduceras till dessa typer.

[1]) Annali di Matematica, 1909.

[2]) Arkiv för matematik, astronomi och fysik, band 7.

Undersökningarna gälla uteslutande lineära ekvationer med två oberoende variabler. För att undvika accessoriska svårigheter antar jag, att ekvationens alla karakteristiker sammanfalla. Genom lämpligt val af de oberoende variablerna får ekvationen då formen

$$\frac{\partial^p z}{\partial x^p} = F\left(z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \ldots \frac{\partial^{p-1} z}{\partial y^{p-1}}\right),$$

där funktionen F är en lineär funktion af z och dess derivator upp till ordningen $p - 1$, hvars koefficienter äro funktioner af x och y. Karakteristikerna äro nu räta linjer, parallela med x-axeln.

För att ekvationen skall höra till den af *Levi* angifna klassen, får funktionen F icke innehålla någon derivata i afseende på y. I så fall är emellertid ekvationen en ordinär differentialekvation i afseende på x, i hvilken y parametriskt ingår. Detta fall ger oss således intet nytt.

Låt oss alltså antaga, att F innehåller åtminstone en derivata i afseende på y. Ett lämpligt fall att börja undersökningarna med är, att F består af den enda termen $\frac{\partial^q z}{\partial y^q}$, $(q < p)$. Ekvationen kan alltså skrifvas

$$L(z) = \frac{\partial^p z}{\partial x^p} - \frac{\partial^q z}{\partial y^q} = 0.$$

Vid studiet af denna ekvation visar det sig, att ett undantagsfall uppstår, om p och q ha en gemensam divisor. För att undvika de härmed förknippade svårigheterna antager jag alltså slutligen, att p och q äro relativa primtal.

Den adjungerade ekvationen till $L(z) = 0$ är

$$M(u) = (-1)^p \frac{\partial^p u}{\partial x^p} - (-1)^q \frac{\partial^q u}{\partial y^q} = 0.$$

Rörande ekvationen $L(z) = 0$ har jag härledt några resultat, som jag i korthet skall referera.

En grundlösning till ekvationen kan bildas på följande sätt. Vi lösa ekvationen i ρ

$$\rho^q = i^p, \quad i = \sqrt{-1},$$

och beteckna dess q rötter med $\rho_0, \rho_1, \cdots \rho_{q-1}$. Vare

$$\rho_\varkappa = \alpha_\varkappa + i\beta_\varkappa.$$

Vi bilda nu de q uttrycken

$$E_{q.\varkappa}(\xi - x, \eta - y) = \int_0^\infty d\mu\, e^{\alpha_\varkappa \mu^{\frac{p}{q}}(\eta - y)} \cos\left[\beta_\varkappa \mu^{\frac{p}{q}}(\eta - y) + \mu(\xi - x)\right],$$

$$\varkappa = 0, 1, \cdots q - 1.$$

Är $\alpha_\varkappa \leqq 0$, så är den oändliga integralen konvergent för $\eta > y$. Är åter $\alpha_\varkappa \geqq 0$, konvergerar integralen för $\eta < y$.

Vi bilda nu vidare summorna

$$\underline{E}_q = \Sigma_\varkappa E_{q,\varkappa}, \quad \overline{E}_q = -\Sigma'_\varkappa E_{q,\varkappa},$$

hvarvid i den första summan alla $\varkappa$-värden medtagas, för hvilka $\alpha_\varkappa < 0$, och i den senare summan alla $\varkappa$, för hvilka $\alpha_\varkappa > 0$. Är något $\alpha_\varkappa = 0$, så medtaga vi motsvarande $E_{q,\varkappa}$ efter behag i den ena eller den andra af de båda summorna.

Det existerar då en entydigt bestämd funktion $E(\xi - x, \eta - y)$ af följande egenskaper:

E satisfierar ekvationen $M(E) = 0$;

För $y < \eta$ är

$$\frac{\partial^{q-1} E}{\partial \eta^{q-1}} = (-1)^{q-1} \frac{\partial^{q-1} E}{\partial y^{q-1}} = \underline{E}_q,$$

för $y > \eta$ är

$$\frac{\partial^{q-1} E}{\partial \eta^{q-1}} = (-1)^{q-1} \frac{\partial^{q-1} E}{\partial y^{q-1}} = \overline{E}_q.$$

Införa vi beteckningarna

$$t = \frac{\xi - x}{(\eta - y)^{\frac{q}{p}}}, \quad \vartheta = \frac{\xi - x}{(y - \eta)^{\frac{q}{p}}},$$

så är för $y < \eta$

$$E(\xi - x, \eta - y) = (\eta - y)^{q-1-\frac{q}{p}} \underline{f}(t),$$

och för $y > \eta$

$$E(\xi - x, \eta - y) = (y - \eta)^{q-1-\frac{q}{p}} \overline{f}(\vartheta).$$

$\underline{f}$ och $\overline{f}$ äro hela transscendenta funktioner af t och ϑ. Grundlösningen E är kontinuerlig jämte alla sina derivator i afseende på x och y, utom för $y = \eta$, då $E, \frac{\partial E}{\partial y}, \cdots \frac{\partial^{q-2} E}{\partial y^{q-2}}$ äro ändliga och kontinuerliga, men $\frac{\partial^{q-1} E}{\partial y^{q-1}}$ är diskontinuerlig.

Beteckna vi med s en sluten kontur i xy-planet och med z en inom s regulär lösning till ekvationen $L(z) = 0$, så är

$$\begin{matrix} q\pi z(\xi, \eta) \\ 0 \end{matrix} = \int_s \left(E \frac{\partial^{q-1} z}{\partial y^{q-1}} - \cdots - (-1)^q \frac{\partial^{q-1} E}{\partial y^{q-1}} z \right) dx +$$

$$+ \int_s \left(E \frac{\partial^{p-1} z}{\partial x^{p-1}} - \cdots - (-1)^p \frac{\partial^{p-1} E}{\partial x^{p-1}} z \right) dy.$$

I denna formel är det öfre värdet till vänster giltigt, om punkten ξ, η befinner sig inom konturen s, och i motsatt fall det nedre. Integralerna tagas i positiv riktning längs hela konturen s.

Fallet $q = 1$ erbjuder några olikheter. I detta fall skola integralerna i ofvanstående formel blott utsträckas till en del af s. Är p delbart med 4, skola de tagas öfver den ofvanför karakteristiken $y = \eta$ belägna delen af s; är p åter delbart med 2, men ej med 4, skola integralerna tagas öfver den under linjen $y = \eta$ belägna delen af konturen. Är slutligen p udda, kunna integralerna tagas antingen öfver den ena eller öfver den andra af dessa båda delar af s.

Såsom redan framhållits, hör ekvationen $L(z) = 0$ icke till den klass, för hvilka *Cauchy's* problem är möjligt från reel synpunkt. Hvilket problem ha vi då att sätta i stället för *Cauchy's*?

Låt oss betrakta en kontur s, inneslutande ett område Γ af xy planet. I s må ingå delar af karakteristiker $y = \text{const.}$ På dessa linjer är $dy = 0$. Då konturen s genomlöpes i positiv riktning, är $dx > 0$, om karakteristiken befinner sig nedanför Γ, och < 0 i motsatt fall. Beteckna med l_0 de förra och med l_1 de senare delarna af konturen. På l_0 är således

$$dy = 0, \quad dx > 0,$$

på l_1 är

$$dy = 0, \quad dx < 0.$$

På de öfriga delarna af konturen är $dy \neq 0$. Låt oss med s_0 beteckna de delar, där

$$dy < 0,$$

och med s_1 de delar, där

$$dy > 0.$$

För korthets skull beteckna vi med (S) kvantiteterna

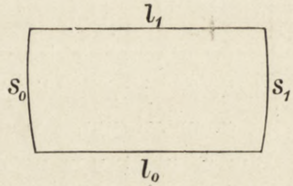
$$(S) \quad z, \frac{\partial z}{\partial x}, \cdots \frac{\partial^{m-1} z}{\partial x^{m-1}}, \qquad m = \frac{p}{2} \quad \text{för } p \text{ jämnt}, \qquad m = \frac{p-1}{1} \quad \text{för } p \text{ udda},$$

och med (L) kvantiteterna

$$(L)\quad z, \frac{\partial z}{\partial y}, \ldots \frac{\partial^{n-1} z}{\partial y^{n-1}}, \qquad n = \frac{q}{2} \text{ för } q \text{ jämnt}, \qquad n = \frac{q-1}{2} \text{ för } q \text{ udda}.$$

Vi kunna då uttala följande satser, hvarvid jag börjar med specialfallet $q = 1$.

Är $q = 1$ och p udda, så är z bestämd inom Γ och på l_1, om man känner värdet af z på l_0, kvantiteterna



(S) på s_0, s_1 och $\frac{\partial^{\frac{p-1}{2}} z}{\partial x^{\frac{p-1}{2}}}$ på s_0, om $\frac{p-1}{2}$ är udda, och på s_1, om $\frac{p-1}{2}$ är jämnt. I denna sats kunna vi emellertid samtidigt permutera s_0, s_1 och l_0, l_1.

Är $q = 1$ och p divisibelt med 4, så är z bestämd inom Γ och på l_0, om kvantiteterna (S) äro gifna på s_0, s_1 och z är gifvet på l_1. Är åter p divisibelt med 2, men ej med 4, så måste (S) vara gifna på s_0, s_1 och z på l_0; värdet af z inom Γ och på l_1 är däraf entydigt bestämdt.

I fallet $q = 1$ är alltså z bestämd genom kännedomen af vissa kvantiteter på en öppen kontur. I vissa fall måste konturen vara öppen uppåt, i andra nedåt. Är p udda, är det likgiltigt, om konturen är öppen uppåt eller nedåt.

För $q > 1$ ha vi att särskilja flera olika fall. Är

a) p udda och q jämnt,

så är z entydigt bestämd inom Γ, om man känner värdet af kvantiteterna (L) på l_0, l_1, (S) på s_0, s_1, samt $\frac{\partial^{\frac{p-1}{2}} z}{\partial x^{\frac{p-1}{2}}}$ på s_0, om $\frac{p-1}{2} + \frac{q}{2}$ är udda, och på s_1, om $\frac{p-1}{2} + \frac{q}{2}$ är jämnt.

Är åter

b) p jämnt och q udda,

så är z bestämd inom Γ, om man känner värdet af kvantiteterna (L) på l_0, l_1, (S) på s_0, s_1, och $\frac{\partial^{\frac{q-1}{2}} z}{\partial y^{\frac{q-1}{2}}}$ på l_0, om $\frac{p}{2} + \frac{q-1}{2}$ är udda, och på l_1, om $\frac{p}{2} + \frac{q-1}{2}$ är jämnt.

I fallet

c) p och q båda udda

har jag däremot icke lyckats härleda någon motsvarande sats. Frågan, huru integrationsproblemet i detta fall bör formuleras, är alltså tills vidare obesvarad. En formulering, analog med den i fallen a) och b), synes dock ganska sannolik.

Fallet p och q båda jämna ingår icke i ramen för våra undersökningar, då vi ju förutsätta, att p och q äro relativa primtal.

Slutligen uppstår frågan, hur man bör gå till väga för att lösa det sålunda uppställda integrationsproblemet. Den ofvan angifna grundformeln är ej tillräcklig härför, enär en del af de kvantiteter, som ingå i högra membrum, äro obekanta. I allmänhet måste integralekvationer användas för problemets lösning. Vissa enkla fall kunna dock lösas utan integralekvationers hjälp. Så är t. ex. förhållandet för $q = 1$, om vi tänka oss de båda kurvorna s_0, s_1 rycka oändligt långt bort. Lösningen är då bestämd genom de värden, den antager längs hela utsträckningen af en karakteristik. Grundformeln ger oss i detta fall direkt den sökta lösningen.

Fallet $q = 2$ kan också lösas utan integralekvationer, om s_0 och s_1 äro oändligt aflägsna. Lösningen är då bestämd mellan två karakteristiker, om dess värde är bekant längs hela utsträckningen af dessa karakteristiker. Det så formulerade problemet kan lösas med den s. k. speglingsmetoden (méthode des images).

Anmärkas må, att fallet $q = 1$ företer stora likheter med värmeledningsproblemet, under det att fallet $q > 1$ i många afseenden påminner om *Dirichlets* problem.